Primitive d'une fonction continue sur un intervalle

TES– Lycée Agora de Puteaux – 2013/2014

Dans tout le chapitre *f* est une fonction continue sur un intervalle I.
Sans précision, on supposera que I = $\mathbb{R}$

A. Définition d'**une** primitive d'une fonction

Une primitive de f sur I est **une fonction dont la dérivée est *f***.
On note habituellement F une primitive de *f* .

Dit autrement, F est une primitive de *f* quand F' = *f* .

Exemples :

- Si $f(x) = x^2$ alors la fonction $F(x) = \frac{x^3}{3}$ est bien une primitive de *f*. En effet, $F'(x) = \frac{3x^2}{3} = x^2 = f(x)$
- Si $g(x) = e^{5x}$ alors la fonction $G(x) = \frac{e^{5x}}{5}$ est bien une primitive de *g* En effet, $G'(x) = \frac{5e^{5x}}{5} = e^{5x} = g(x)$

Méthode :
Pour déterminer si F est une primitive de *f* , il suffit de dériver F. Si :
- **F' = *f* alors F est une primitive de *f***
- **F' ≠ *f* alors F n'est pas une primitive de *f***

Exercices

1) Antilles–Guyane septembre 2010
Soit la fonction *f* est définie sur [1; 6] par $f(x) = -4x + 20$.
On considère la fonction F définie sur l'intervalle [1; 6] par $F(x) = -2x^2 + 20x - 18$.
Montrer que F est une primitive de la fonction *f* sur [1; 6].

2) Amérique du Nord 31 mai 2012
Soit f la fonction définie et dérivable sur [−2 ; 4] par $f(x) = (x + 2)e^{-x}$.
Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle [−2 ; 4] par $F(x) = (-x - 3)e^{-x}$ est une primitive de *f* .

3) Métropole septembre 2012
La fonction *f* est définie sur l'ensemble des nombres réels par $f(x) = e^x - x + 1$.
Une primitive sur l'ensemble des nombres réels de la fonction *f* est la fonction F définie sur l'ensemble des nombres réels par :
• $F(x) = e^x - 1$ • $F(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 + x$ • $F(x) = e^{2x} - \frac{1}{2}x^2 + x$ • $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 1$

B. **Déterminer** une primitive d'une fonction

Soit *f* donnée, il s'agit cette fois-ci de trouver par vous-même une primitive de *f* .
Attention, il ne faut pas dériver *f* mais bien chercher une fonction dont la dérivée est *f*.

1) Propriété fondamentale (admise)
Soit *f* une fonction continue sur I alors F admet des primitives.

Remarque :
Parfois, on ne sait pas exprimer directement ces primitives. Dans les paragraphes suivants, on étudiera des fonctions dont on sait exprimer les primitives et on verra un exemple de fonction pour laquelle on ne le sait pas.

2) Premières relations fonctionnelles
- Soit *f* une fonction dont F est une primitive sur I et c une constante.
  Alors la fonction cF est une primitive de c*f*.

  Exemples :
  Déterminer une primitive de $f(x) = 7x^2$ et de $g(x) = 13e^{5x}$
  La propriété dit qu'une primitive de *f* sera égale à « 7 fois » une primitive de $x \to x^2$. À partir des primitives du paragraphe précédent, on trouve : $F(x) = 7 \times \frac{x^3}{3} = \frac{7}{3}x^3$
  De la même façon, on trouve $G(x) = 13 \times \frac{e^{5x}}{5} = \frac{13}{5}e^{5x}$

- Soit *f* et *g* deux fonctions dont F et G sont les primitives sur I et c une constante.
  Alors la fonction F + G est une primitive de *f* + *g*

  Exemple :
  Déterminer une primitive de $h(x) = x^2 + e^{5x}$
  La propriété et les résultats précédents donnent directement $H(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{e^{5x}}{5}$

Remarque :
Il n'y a pas de difficultés pour trouver une primitive au produit d'une fonction et d'une constante ni pour trouver une primitive d'une somme (ou d'une différence de fonctions)

3) Fonctions polynomiales
On a déjà observé que si l'expression de *f* est $f(x) = x^2$, une primitive de *f* est F où $F(x) = \frac{x^3}{3}$. Plus généralement, on a :

Propriété :

Soit un entier naturel n et la fonction réelle *f* dont l'expression est $f(x) = x^n$. Alors :
La fonction réelle F dont l'expression est $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ est une primitive de *f*.

Démonstration : $F'(x) = \frac{(n+1)x^n}{n+1} = x^n = f(x)$. CQFD

Exemples :

- En faisant varier n de 0 à 4, on obtient :

$f(x)$ expression la fonction	1	x	x^2	x^3	x^4
$F(x)$ expression d'une primitive	x	$\frac{x^2}{2}$	$\frac{x^3}{3}$	$\frac{x^4}{4}$	$\frac{x^5}{5}$

- En utilisant les relations fonctionnelles, on peut déterminer une primitive de toutes les fonctions polynomiales.
  Soit la fonction *f* dont l'expression est $f(x) = 4x^3 + 7x^2 - 5x + 6$. Une primitive de *f* est F avec $F(x) = 4\frac{x^4}{4} + 7\frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} + 6x = x^4 + \frac{7}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x$

Exercices :
1 &2 & 5 p 158 – 61 p 167

4) Fonctions exponentielles

Pour déterminer des primitives, on peut aussi lire le tableau de dérivation dans l'autre sens.

Propriétés :

- La fonction exponentielle est une primitive de la fonction exponentielle.
- Soit la fonction *f* définie sur I dont l'expression est $f(x) = u'(x)e^{u(x)}$ où *u* une fonction continue sur I.
  Alors $F(x) = e^{u(x)}$ est une primitive de *f*.

Exemples :

- Soit la fonction réelle *f* dont l'expression est $f(x) = 3x^2e^{(x^3)}$. Alors $F(x) = e^{(x^3)}$ est une primitive de *f*.
- En revanche pour la fonction réelle *g* dont l'expression est $g(x) = e^{(x^3)}$; **on ne peut pas exprimer de primitives** car l'expression cette fonction n'est pas de la forme $x^2e^{(x^3)}$.

Exercices :
Application directe : 16 &17 & 24 p 159
À l'aide de la **méthode 2** : 20 & 21 p 159

Une propriété qui peut être utile pour le bac
Propriété :

Soient *a* et *b* deux nombres réels ($a \neq 0$) et la fonction réelle *f* dont l'expression est $f(x) = e^{ax+b}$. Alors :
La fonction réelle F dont l'expression est $F(x) = \frac{e^{ax+b}}{a}$ est une primitive de *f*.

Démonstration :
f semble de la forme e^u avec $u = ax + b$ et $u' = a$.
On transforme l'expression de f (méthode 2) : $f(x) = \frac{1}{a} \times \boldsymbol{a \times e^{ax+b}}$.
Cela donne $F(x) = \frac{1}{a} \times e^{ax+b}$. CQFD *(Rq : J'aurais aussi pu dériver F pour démontrer)*

C. Déterminer **les** primitives d'une fonction
D. Complément : les exercices de variation

Message :

Meilleurs vœux à tous pour cette nouvelles année ; je vous souhaite la santé et la réussite.
Je suis bien absent 3 semaine suite à un congé paternité.

Mode d'emploi du cours :

Le principe est le travail en autonomie, mais cela ne veut pas dire seul. Je vous conseille des groupes de 3 avec 2 niveaux différents.

Temps conseillé : Une à deux heures pour les 3 thèmes :

- Partie A
- Partie B paragraphes 1,2 et 3
- Partie B paragraphe 4

Pour toutes vos questions, contactez moi à mon adresse : harchymaide@hotmail.com

Je compte déposer un corrigé la semaine prochaine sur le blog :
http://lewebpedagogique.com/harchymaide/

Travail de programmation : Tableau de signe

Compléter le programme de DISCRIM pour qu'il affiche le tableau de signe

Réaliser un programme PREMDEG qui donne la racine et le tableau de signe d'une expression du premier degré.

Pensez à relire le cours

Conseil :

Une citation pour vous encourager :
« On a bien souvent évoqué la rapidité avec laquelle Muad'Dib apprit les nécessités d'Arrakis. Les Bene Gesserit, bien sûr, en connaissent la raison. A l'intention des autres, nous pouvons dire ici que Muad'Dib apprit aussi rapidement parce que le premier enseignement qu'il eût reçu était de savoir apprendre. Et la leçon première de cet enseignement était la certitude qu'il pouvait apprendre. Il est troublant de découvrir combien de gens pensent qu'ils ne peuvent apprendre et combien plus encore croient que c'est là chose difficile Muad'Dib savait que chaque expérience porte en elle sa leçon. » (Frank Herbert – Dune)